

Фуллереновый тор. Решение

Пусть V — число вершин, E — число рёбер, а F — число граней фуллеренового тора. Обозначим через F_5 число пятиугольных граней, а через F_6 — число шестиугольных. Поскольку в каждой вершине сходится по 3 ребра, число концов рёбер равно $2E = 3V$.

Найдём теперь двумя способами число пар вида (грань, ребро этой грани). С одной стороны, это число равно удвоенному числу рёбер $2E$. С другой стороны, считая по граням, получаем $5F_5 + 6F_6$. Таким образом, $2E = 5F_5 + 6F_6$. Итак,

$$\begin{cases} 2E = 3V; \\ 2E = 5F_5 + 6F_6; \\ E = V + F_5 + F_6. \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3V = 5F_5 + 6F_6; \\ 3V = 2V + 2F_5 + 2F_6. \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3V = 5F_5 + 6F_6; \\ V = 2F_5 + 2F_6. \end{cases}$$
$$6F_5 + 6F_6 = 5F_5 + 6F_6$$
$$F_5 = 0$$