Заочная нанoолимпиада по математике 2010.

Задача 2. Одиннадцать школьников пишут олимпиаду по нанотехнологиям в одной из аудиторий. Задание олимпиады состоит из 5 задач. Каждый сделал хотя бы 1 задачу. Доказать, что среди школьников есть хотя бы двое таких, что все задачи, успешно решённые одним из них, сделал и другой.

Доказательство. Считаем, что участник A слабее участника B, если B сделал все задачи, сделанные A. Таким образом мы можем сравнивать некоторых участников олимпиады. Любую совокупность упорядоченных участников назовём цепью. Максимальная цепь имеет длину 5 и всего есть 5! максимальных цепей, образованных различными перестановками номеров решённых задач. Если зафиксировать множество из k номеров, то существует $k!(5-k)!$ цепей, содержащих это множество. Рассмотрим теперь несравнимые множества решённых задач и обозначим R наибольший размер такого множества. Тогда

$$\sum_{k=1}^{R} k!(5-k)! \leqslant 5!.$$

Поэтому

$$1 \geqslant \sum_{k=1}^{R} \frac{k!(5-k)!}{5!} \geqslant R \cdot \min\left\{\frac{k!(5-k)!}{5!}\right\} = \frac{R}{\max\left\{\frac{5!}{k!(5-k)!}\right\}}.$$

откуда следует, что R меньше, или равно максимальной из этих величин

$$R \leqslant \max\left\{\frac{5!}{k!(5-k)!}\right\} = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

Поскольку число участников равно 11, среди них есть хотя бы двое, один из которых слабее другого.